



## .01

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \geq 0}$  المعرفة كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n} ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

**01.** نبين أن:  $0 \leq u_n \leq 3$  :  $\forall n \geq 0$ .

نستدل على ذلك بالترجع :

- نتحقق أن العلاقة صحيحة ل  $n = 0$ .
  - لدينا :  $u_0 = 3$  ومنه :  $0 \leq u_0 \leq 3$  و بالتالي العلاقة صحيحة بالنسبة ل  $n = 0$ .
  - نفترض أن العلاقة صحيحة إلى  $n$  أي  $0 \leq u_n \leq 3$  صحيحة ( معطيات الترجع )
  - نبين أن العلاقة صحيحة ل  $n + 1$ . أي نبين أن :  $0 \leq u_{n+1} \leq 3$ .
- لدينا : حسب معطيات الترجع  $0 + 1 \leq u_n + 1 \leq 3 + 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{u_n + 1} \leq \frac{1}{1}$$

$$\Rightarrow 2 \times \frac{1}{4} \leq 2 \times \frac{1}{u_n + 1} \leq 2 \times 1 ; (2 > 0)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{2}{u_n + 1} \leq 2$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 2 \leq 3$$

$$\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 3$$

إذن العلاقة صحيحة ل  $n + 1$ .

**خلاصة :**  $\forall n \geq 0 : 0 \leq u_n \leq 3$

**02.** نعتبر المتتالية العددية  $(v_n)_{n \geq 0}$  المعرفة كما يلي:  $\forall n \in \mathbb{N} ; v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$ .

**أ-** نبين أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية وحدد عناصرها المميزة.

لدينا :

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{u_n - 1}{u_n + 2} \\ &= \frac{2}{u_n + 1} - 1 \\ &= \frac{2}{u_n + 1} + 2 \\ &= \frac{2 - u_n - 1}{2 + 2u_n + 2} \end{aligned}$$



$$= \frac{1}{2} \times \frac{-u_n + 1}{u_n + 2}$$

$$= \frac{-1}{2} \times \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$

$$= \frac{-1}{2} \times v_n$$

$$v_{n+1} = \frac{-1}{2} \times v_n \text{ ومنه :}$$

**خلاصة :** المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها :  $q = -\frac{1}{2}$  وحدها الأول هو  $u_0 = 3$ .

**ب-** نكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ .

• المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها :  $q = -\frac{1}{2}$  وحدها الأول  $v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 2} = \frac{3-1}{3+2} = \frac{2}{5}$  إذن حدها العام هو

$$v_n = \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-n_0} \times v_{n_0} \quad (n_0 = 0)$$

$$= \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-0} \times \frac{2}{5} \quad \left(v_{n_0} = v_0 = \frac{2}{5}\right)$$

$$= \left(\frac{-1}{2}\right)^n \times \frac{2}{5}$$

**خلاصة :** كتابة  $v_n$  بدلالة  $n$   $v_n = \left(\frac{-1}{2}\right)^n \times \frac{2}{5}$

• ثم نستنتج  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ .

لدينا :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^n = 0$   $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^n \times \frac{2}{5} = 0$  (لأن  $-1 < q < 1$  حسب خاصية)

**خلاصة :**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

**.02**

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \geq 0}$  المعرفة كما يلي :  $\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2 + (u_n)^2} ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

(1) نبين أن :  $u_n > 0 ; \forall n \geq 0$ .

نستدل على ذلك بالترجع :

• نتحقق أن العلاقة صحيحة ل  $n = 0$ .

لدينا :  $u_0 > 0$  و بالتالي العلاقة صحيحة بالنسبة ل  $n = 0$ .

• نفترض أن العلاقة صحيحة إلى  $n$  أي  $u_n > 0$  صحيحة (معطيات التراجع)



• نبين أن العلاقة صحيحة ل  $n+1$  . أي نبين أن :  $u_{n+1} > 0$  .

لدينا : حسب معطيات الترجع  $u_n > 0$  و  $2 + (u_n)^2$   $\Rightarrow u_n > 0$  .

$$\Rightarrow \frac{u_n}{2 + (u_n)^2} > 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > 0$$

إذن العلاقة صحيحة ل  $n+1$  .

**خلاصة :**  $\forall n \geq 0 : u_n > 0$

(2) نبين أن:  $u_n$  تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة.

• نبين أن:  $u_n$  تناقصية :

لدينا :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{2 + (u_n)^2} - u_n$$

$$= \frac{u_n - u_n(2 + (u_n)^2)}{2 + (u_n)^2}$$

$$= \frac{u_n(1 - 2 - (u_n)^2)}{2 + (u_n)^2}$$

$$= \frac{-u_n(1 + (u_n)^2)}{2 + (u_n)^2} < 0 \quad ; \quad (u_n > 0)$$

ومنه :  $u_{n+1} - u_n < 0$  أي  $u_{n+1} < u_n$  .

**خلاصة :**  $u_n$  تناقصية

• نستنتج أنها متقاربة.

لدينا :

-  $\forall n \geq 0 : u_n > 0$  أي مصغرة ب 0 .

-  $u_n$  تناقصية .

ومنه :  $u_n$  متقاربة ( حسب خاصية ) .

**خلاصة :**  $u_n$  متقاربة .

(3)

أ- نبين أن:  $\forall n \geq 0 : u_{n+1} \leq \frac{u_n}{2}$  .

لدينا :

$$u_n > 0 \Rightarrow (u_n)^2 > 0$$

$$\Rightarrow 2 + (u_n)^2 > 2$$



$$\Rightarrow \frac{1}{2+(u_n)^2} < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow u_n \times \frac{1}{2+(u_n)^2} < u_n \times \frac{1}{2} ; (u_n > 0)$$

$$\Rightarrow u_{n+1} < \frac{u_n}{2}$$

$$\text{و منه : } u_{n+1} \leq \frac{u_n}{2}$$

$$\forall n \geq 0 : u_{n+1} \leq \frac{u_n}{2} \text{ : خلاصة}$$

$$\text{ب- نستنتج أن : } \forall n \geq 0 : u_n \leq \frac{u_0}{2^n}$$

$$\text{لدينا : } u_{n+1} \leq \frac{u_n}{2}$$

$$\bullet \text{ بالنسبة ل : } n=0 \text{ إذن : } u_1 \leq \frac{u_0}{2}$$

$$\bullet \text{ بالنسبة ل : } n=1 \text{ إذن : } u_2 \leq \frac{u_1}{2}$$

$$\bullet \text{ بالنسبة ل : } n=2 \text{ إذن : } u_3 \leq \frac{u_2}{2}$$

$$\bullet \text{ : : :}$$

$$\bullet \text{ بالنسبة ل : } n-2 \text{ إذن : } u_{n-1} \leq \frac{u_{n-2}}{2}$$

$$\bullet \text{ بالنسبة ل : } n-1 \text{ إذن : } u_n \leq \frac{u_{n-1}}{2}$$

جداء المتفاوتات السابقة طرف بطرف مع العلم أن كل طرف موجب نحصل بعد الاختزال

$$\text{على ما يلي : } u_n \leq \frac{u_0}{2^n} \text{ أي } u_n \leq \underbrace{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \dots \times \frac{1}{2}}_{n \text{ fois}} u_0$$

$$\forall n \geq 0 : u_n \leq \frac{u_0}{2^n} \text{ : خلاصة}$$

ملحوظة : يمكن الاستدلال على ذلك بالترجع .

$$\text{ج- نستنتج نهاية المتتالية } u_n$$

لدينا :

$$\bullet u_n > 0 \text{ حسب السؤال الأول}$$

$$\bullet u_n \leq \frac{u_0}{2^n} \text{ حسب السؤال الأخير}$$



• إذن :  $0 < u_n \leq \frac{u_0}{2^n}$  .

• حسب خاصية .  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_0}{2^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x \times u_0 = 0$  ;  $\left(-1 < \frac{1}{2} < 1\right)$  .

ومنه حسب أحد مصادق التقارب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

**خلاصة :**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

**.03**

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \geq 0}$  المعرفة كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{u_n}{5 + 4u_n} \end{cases}$$

**.01**

**أ-** أحسب:  $u_1$  و  $u_2$  .

لدينا:  $u_1 = \frac{u_0}{5 + 4u_0} = \frac{3}{5 + 4 \times 3} = \frac{3}{17}$  و  $u_2 = \frac{u_1}{5 + 4u_1} = \frac{\frac{3}{17}}{5 + 4 \times \frac{3}{17}} = \frac{3}{17} \times \frac{1}{5 + 4 \times \frac{3}{17}} = \frac{3}{97}$

**خلاصة :**  $u_1 = \frac{3}{17}$  و  $u_2 = \frac{3}{97}$

**ب-** بين أن:  $u_n > 0$  :  $\forall n \geq 0$  .

نستدل على ذلك بالترجع :

• نتحقق أن العلاقة صحيحة ل  $n = 0$  .

لدينا :  $u_0 = 3 > 0$  و بالتالي العلاقة صحيحة بالنسبة ل  $n = 0$  .

• نفترض أن العلاقة صحيحة إلى  $n$  أي  $u_n > 0$  صحيحة ( معطيات التراجع )

• نبين أن العلاقة صحيحة ل  $n + 1$  . أي نبين أن :  $u_{n+1} > 0$  .

لدينا : حسب معطيات التراجع :  $(u_n > 0 \text{ و } 5 + 4u_n > 0) \Rightarrow u_n > 0$

$$\Rightarrow \frac{u_n}{5 + 4u_n} > 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > 0$$

إذن العلاقة صحيحة ل  $n + 1$  .

**خلاصة :**  $\forall n \geq 0 : u_n > 0$

**ج-** بين أن:  $u_n$  تناقصية.

لدينا :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n}{5 + 4u_n} - u_n \\ &= \frac{u_n - u_n(5 + 4u_n)}{5 + 4u_n} \end{aligned}$$



$$= \frac{u_n (1 - 5 - 4u_n)}{5 + 4u_n}$$

$$= \frac{-4u_n (1 + u_n)}{5 + 4u_n} < 0 \quad ; \quad (u_n > 0)$$

ومنه :  $u_{n+1} - u_n < 0$  أي  $u_{n+1} < u_n$ .

**خلاصة :  $u_n$  تناقصية**

**د-** استنتج تقارب المتتالية  $u_n$ .

لدينا :

-  $u_n > 0$  حسب السؤال الأول إذن  $u_n$  مصغرة

-  $u_n$  تناقصية.

-  $u_n$  متقارب ( حسب خاصية ) .

**خلاصة :  $u_n$  متقارب**

**02...**

**أ-** بين أن :  $\forall n \geq 0 : u_{n+1} \leq \frac{1}{5} u_n$

لدينا :

$$u_n > 0 \Rightarrow 5 + 4u_n > 5$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5 + 4u_n} < \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow u_n \times \frac{1}{5 + 4u_n} < u_n \times \frac{1}{5} \quad ; \quad (u_n > 0)$$

$$\Rightarrow u_{n+1} < \frac{u_n}{5}$$

ومنه :  $u_{n+1} \leq \frac{u_n}{5}$

**خلاصة :  $\forall n \geq 0 : u_{n+1} \leq \frac{u_n}{5}$**

**ب-** بين أن :  $\forall n \geq 0 : u_n \leq 3 \left( \frac{1}{5} \right)^n$

لدينا :  $u_{n+1} \leq \frac{u_n}{5}$

• بالنسبة ل :  $n = 0$  إذن :  $u_1 \leq \frac{u_0}{5}$

• بالنسبة ل :  $n = 1$  إذن :  $u_2 \leq \frac{u_1}{5}$

• بالنسبة ل :  $n = 2$  إذن :  $u_3 \leq \frac{u_2}{5}$



• : : :

• بالنسبة ل :  $n-2$  إذن :  $u_{n-1} \leq \frac{u_{n-2}}{5}$

• بالنسبة ل :  $n-1$  إذن :  $u_n \leq \frac{u_{n-1}}{5}$

جداء المتفاوتات السابقة طرف بطرف مع العلم أن كل طرف موجب نحصل بعد الاختزال

على ما يلي :  $u_n \leq \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \dots \times \frac{1}{5} u_0$  أي  $u_n \leq \frac{u_0}{5^n}$  ومنه :  $u_n \leq \frac{3}{5^n}$  أي :  $\forall n \geq 0 : u_n \leq 3 \left(\frac{1}{5}\right)^n$

**خلاصة :**  $\forall n \geq 0 : u_n \leq 3 \left(\frac{1}{5}\right)^n$

**ملحوظة :** يمكن الاستدلال على ذلك بالترجع .

**ج-** استنتج أن :  $\forall n \geq 0 : 0 < u_n \leq 3 \left(\frac{1}{5}\right)^n$

لدينا :

•  $u_n > 0$  حسب السؤال الأول

•  $u_n \leq \frac{u_0}{2^n}$  حسب السؤال الأخير

• إذن :  $0 < u_n \leq \frac{u_0}{2^n}$

**خلاصة :**  $\forall n \geq 0 : 0 < u_n \leq 3 \left(\frac{1}{5}\right)^n$

**د-** أوجد النهاية التالية :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

•  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_0}{2^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x \times u_0 = 0$  ;  $\left(-1 < \frac{1}{2} < 1\right)$  حسب خاصية .

• ومنه حسب أحد مصادق التقارب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

**خلاصة :**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

لتكن  $u_n$  و  $v_n$  متتاليتين معرفتين بما يلي : لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  :  $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{3v_n + 1}{4} ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$  و  $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{4} ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$

• طريقة 1 لتحديد نهاية  $u_n$  .

1. لنعتبر المتتالية  $s_n$  المعرفة ب :  $\forall n \in \mathbb{N} , s_n = u_n + v_n$  .

بين بالترجع أن المتتالية  $s_n$  ثابتة .

نستدل على ذلك بالترجع :



لدينا :  $s_n = 2$  إذن نبين أن :  $s_0 = u_0 + v_0 = 0 + 2 = 2$

- نتحقق أن العلاقة صحيحة ل  $n = 0$  .
- لدينا :  $s_0 = u_0 + v_0 = 0 + 2 = 2$  و بالتالي العلاقة صحيحة بالنسبة ل  $n = 0$  .
- نفترض أن العلاقة صحيحة إلى  $n$  أي  $s_n = 2$  صحيحة ( معطيات التراجع )
- نبين أن العلاقة صحيحة ل  $n + 1$  . أي نبين أن :  $s_{n+1} = 2$  .

$$s_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{4} + \frac{3v_n + 1}{4} = \frac{3(u_n + v_n) + 2}{4} = \frac{3s_n + 2}{4} = \frac{3 \times 2 + 2}{4} = 2$$

إذن :  $s_{n+1} = 2$

إذن العلاقة صحيحة ل  $n + 1$  .

**خلاصة :** المتتالية  $s_n$  ثابتة مع  $s_n = u_n + v_n = 2$  ،  $\forall n \in \mathbb{N}$  .

**2.** نعتبر المتتالية  $d_n$  المعرفة ب :  $d_n = v_n - u_n$  ،  $\forall n \in \mathbb{N}$  .  
بين أن المتتالية  $d_n$  هندسية محددًا عناصرها المميزة .

لدينا :

$$d_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{3v_n + 1}{4} - \frac{3u_n + 1}{4} = \frac{3(v_n - u_n) + 1 - 1}{4} = \frac{3}{4}(v_n - u_n) = \frac{3}{4}d_n$$

ومنه :  $d_{n+1} = \frac{3}{4}d_n$

**خلاصة :** المتتالية  $d_n$  هندسية أساسها  $q = \frac{3}{4}$  وحدها الأول  $d_n = v_0 - u_0 = 2 - 0 = 2$

**3.** استنتج :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = 0$

لدينا : المتتالية  $d_n$  هندسية أساسها  $q = \frac{3}{4}$  إذن :  $d_n = d_{n_0} \times q^{n-n_0} = d_0 \times q^n = 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$

ومنه :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$  ;  $\left(-1 < \frac{3}{4} < 1\right)$

**خلاصة :**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = 0$

**4.** نكتب  $u_n$  بدلالة  $s_n$  و  $d_n$  ؛ ثم  $u_n$  بدلالة  $n$  .  
لدينا :

$$\left. \begin{array}{l} s_n = u_n + v_n \\ d_n = v_n - u_n \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} s_n + d_n = 2v_n \\ s_n - d_n = 2u_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_n = \frac{s_n + d_n}{2} & (1) \\ u_n = \frac{s_n - d_n}{2} & (2) \end{cases}$$





$$\text{و منه : } u_n = \frac{s_n - d_n}{2} = \frac{2 - 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n}{2} = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n \quad (\text{لأن : } d_n = 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n \text{ و } s_n = 2 \text{ ثابتة})$$

$$\text{. خلاصة : } u_n = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

ب- نكتب  $v_n$  بدلالة  $s_n$  و  $d_n$  ؛ ثم  $v_n$  بدلالة  $n$ .

$$\text{حسب العلاقة (1) : لدينا : } v_n = \frac{s_n + d_n}{2} \text{ ومنه } v_n = \frac{s_n + d_n}{2} = \frac{2 + 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n}{2} = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$\text{. خلاصة : } v_n = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

ج- نستنتج  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n = 1 ; \left(-1 < \frac{3}{4} < 1\right)$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n = 1 ; \left(-1 < \frac{3}{4} < 1\right)$$

$$\text{. خلاصة : } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1 \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

• طريقة 2 لمعرفة نهاية  $u_n$  مبيانيا .

لنعتبر الدالة العددية  $f$  للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة بما يلي :  $f(x) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$  . الرسم أسفله  $(C_f)$  يمثل منحنى للدالة  $f$  و المستقيم  $(\Delta)$

ذو المعادلة :  $y = x$  :  $(\Delta)$  في معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  و وحدة القياس 5 cm

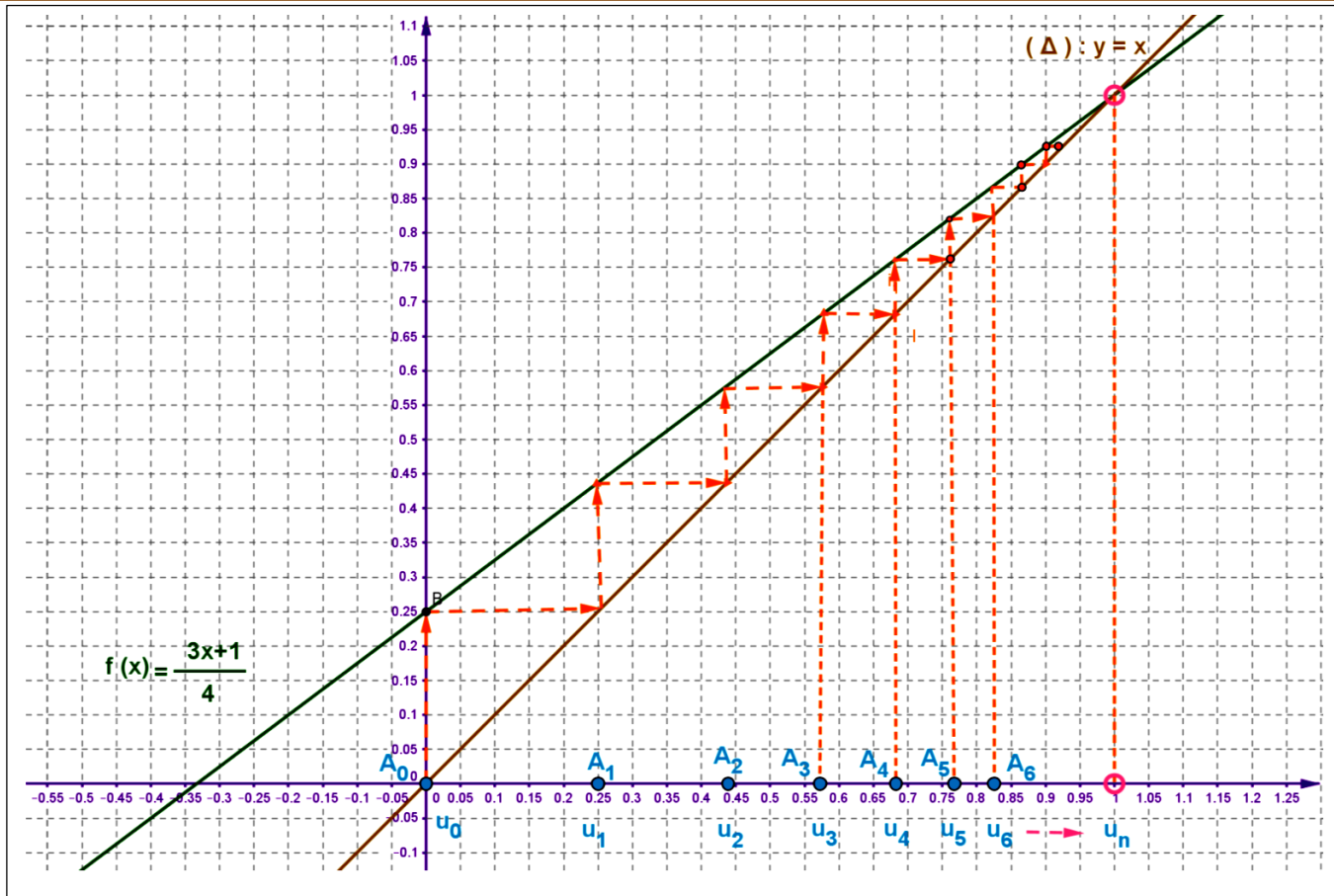
1. نمثل على محور الأفاصل النقاط  $A_0$  و  $A_1$  و  $A_2$  و  $A_3$  و  $A_4$  التي أراتبها منعدمة و أفاصلها هي  $u_0$  و  $u_1$  و  $u_2$  و  $u_3$  و  $u_4$

$$\text{على التوالي . مع } u_1 = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ و } u_2 = \frac{7}{16} \approx 0,44 \text{ و } u_3 = \frac{37}{64} \approx 0,58 \text{ و } u_4 = \frac{175}{256} \approx 0,69$$

على المنحنى نضع المسلك الذي نتبعه للحصول على قيم هذه الحدود و هي ممثلة على محور الأفاصل بدون استعمال قيم  $u_1$  و  $u_2$  و

$u_3$  و  $u_4$  .

أنظر الشكل الموالي :



2. ما هو التظنن الذي نحصل عليه ؟

- المتتالية  $u_n$  تزايدية .
- المتتالية  $u_n$  مكبورة ب 1 .
- الحدود  $u_n$  محصورة بين 0 و 1 أي  $0 \leq u_n \leq 1$  .
- المتتالية متقاربة .
- نهاية المتتالية هي 1 .
- طريقة 3 لتحديد نهاية  $u_n$  .

1. أ- نعطي جدول تغيرات  $f$  على  $\mathbb{R}$  .

جدول تغيرات الدالة  $f$  لدينا :  $f'(x) = \frac{3}{4}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

ب- نبين أن :  $f([0;1]) \subset [0;1]$  .



لدينا :

• الدالة  $f$  متصلة على  $[0;1]$  (حدودية)• الدالة  $f$  تزايدية قطعا على  $[0;1]$ 

$$\text{ومنه : } f([0;1]) = [f(0), f(1)] = \left[\frac{1}{4}; 1\right] \subset [0;1]$$

• ج - أكتب المتتالية  $(u_n)$  مستعملا الدالة  $f$ .• لدينا :  $u_{n+1} = f(u_n)$ • أ - بين ان :  $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 \leq u_n \leq 1$ 

نستدل على ذلك بالترجع :

• نتحقق أن العلاقة صحيحة ل  $n = 0$ • لدينا :  $u_0 = 0$  ومنه :  $0 \leq u_0 = 0 \leq 1$  و بالتالي العلاقة صحيحة بالنسبة ل  $n = 0$ • نفترض أن العلاقة صحيحة إلى  $n$  أي  $0 \leq u_n \leq 1$  صحيحة (معطيات الترجع)• نبين أن العلاقة صحيحة ل  $n+1$  . أي نبين أن :  $0 \leq u_{n+1} \leq 1$ 

$$\text{لدينا : حسب معطيات الترجع } 0 \leq u_n \leq 1 \Rightarrow \frac{3}{4} \times 0 \leq \frac{3}{4} \times u_n \leq \frac{3}{4} \times 1$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} \times 0 + \frac{1}{4} \leq \frac{3}{4} \times u_n + \frac{1}{4} \leq \frac{3}{4} \times 1 + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{3}{4} \times u_n + \frac{1}{4} \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{4} \leq u_{n+1} \leq 1$$

ومنه :  $0 \leq u_{n+1} \leq 1$ • إذن العلاقة صحيحة ل  $n+1$ **خلاصة :**  $\forall n \geq 0 : 0 \leq u_n \leq 1$ • ب - بين أن  $(u_n)$  تزايدية .

لدينا :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 1}{4} - u_n$$

$$= \frac{-u_n + 1}{4} \geq 0 \quad ; \quad (0 \leq u_n \leq 1 \Rightarrow 1 - u_n \geq 0)$$

• ومنه :  $u_{n+1} - u_n \geq 0$  أي  $u_{n+1} \geq u_n$ **خلاصة :**  $u_n$  تزايدية• ج - استنتج أن :  $(u_n)$  لها نهاية منتهية  $l$  .

لدينا :

• -  $u_n \leq 1$  حسب السؤال الأول إذن  $u_n$  مكبورة ب 1 .



-  $u_n$  تزايدية.

-  $u_n$  متقارب ( حسب خاصية ) .

**خلاصة:**  $u_n$  متقارب إذن لها نهاية منتهية .

**د-** بين أن :  $l \leq 1$

بما أن جميع الحدود محصورة بين 0 و 1 إذن  $l$  نهاية  $u_n$  تحقق  $l \leq 1$

**ه-** حدد قيمة  $l$  .

لدينا :

• الدالة  $f$  متصلة على  $[0;1]$  .

•  $f([0;1]) \subset [0;1]$

•  $u_n = 0 \in [0;1]$

•  $u_n$  متقارب .

إذن :  $l$  نهاية  $u_n$  هي حل للمعادلة  $f(x) = x$  ;  $x \in [0;1]$  .

نحل المعادلة :

لدينا :

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{3x+1}{4} = x$$

$$\Leftrightarrow 3x+1 = 4x$$

$$\Leftrightarrow -x+1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

ومنه :  $l = 1$

**خلاصة:** قيمة  $l$  نهاية المتتالية  $u_n$  هي  $l = 1$  .